

DE 数値積分公式と Sinc 関数展開を用いたアメリカン・ プット・オプションの早期権利行使境界の高精度数値計算

一橋大学大学院経営管理研究科

杉田 恭将 (Yasumasa SUGITA) *

概要

Black-Scholes 方程式は金融工学において広く知られた偏微分方程式であり、特にオプションの価格評価に用いられている。本研究では、アメリカン・プット・オプションの早期権利行使境界を数値計算により高精度に近似する手法を提案する。応用数学分野で広く知られる高精度数値計算法である、二重指数型変数変換 (Double Exponential transformation) および Sinc 関数展開を用いて、権利行使境界を相対誤差 10^{-13} 程度の精度で計算することに成功した。

1 研究の背景

近代のファイナンス研究の先駆けとなるオプション理論は、Black and Scholes(1973)[2] により提案され、Black and Scholes は、原資産過程が幾何ブラウン運動に従うという仮定のもとで、無裁定価格理論を用いてヨーロピアン・オプション価格の評価を行い、金融工学の基礎となる理論を築き上げた。また、Merton(1973)[7] は、配当なしアメリカン・コール・オプションの価格評価に関する理論を提案し、アメリカン・コール・オプションの価格は金利の関係により早期権利行使され得ず、ヨーロピアン・コール・オプションの価格と等しくなることを示した。しかしながら、アメリカン・プット・オプションの価格評価は、価格評価式それ自体に最適行使境界を含むことにより数学的に難しい問題である。そのため、解を解析的に得ることはできず、近似解法を用いることが必要になる。アメリカン・プット・オプションの価格評価に対する手法は、これまでに数多く提案されている。古典的にはラティス法を用いた近似や偏微分方程式に対して SOR 法を適用した近似手法などが挙げられるが、満期直前において細かい離散化が必要になり、数値計算の効率性及び計算精度は劣る。

これまでの研究で、アメリカン・プット・オプションの最適権利行使境界は、満期直前に複雑な振る舞いをすることが知られている [5]。Barles *et al.*(1995)[1] では、最適行使境界の満期直前の挙動は、解析的および数値的研究において有用性があるものとして、最適権利行使境界の漸近的性質を解析し、満期直前の挙動には特異性があることを明らかにした。その上で、満期直前の振る舞いを解析的に導出し、最適権利行使境界の近似式を提案した。また、Chen and Chadam(2007)[4] では、満期直前で解の挙動を漸近的にモデル化する研究がなされ、explicit approximation や implicit approximation, ODE approximation などの数値計算結果を示し、その相対誤差を示しているが、い

* E-mail:bd231005@g.hit-u.ac.jp

ずれの計算手法も精度が得られていない。本研究では、これらの課題に対して、応用数学では広く知られる数値計算手法である二重指数型数値積分公式 (通称:DE 公式) や Sinc 関数展開を用いて、既存研究よりも高精度に早期権利行使境界を数値計算する手法を提案する。

2 研究の概要

株式などの値動きにより価格が決定される金融商品は金融派生商品と呼ばれ、リスク管理等において重要な役割を果たしている。特に、決められた条件の下で、ある資産 (これを原資産という) を事前に決められた価格 (これを権利行使価格という) で買う (ないしは売る) 権利をオプションという。オプションの保有者は満期に (または満期までの任意の時点に) 権利行使することができる。オプションにはいくつかの種類があるが、権利行使可能なタイミングにより 2 種類に大別される。ヨーロピアン・オプションは満期にのみ権利行使可能な商品である。それに対して、アメリカン・オプションは満期までの任意の時刻において、早期権利行使が可能な商品である。また、原資産を権利行使価格で買う権利をコールといい、売る権利をプットという。ここで、配当のない原資産を考え、その価格を S_t で表す。ヨーロピアン・コール・オプションは、満期 $t = T$ において、原資産価格 S_t が権利行使価格 K よりも高い場合にのみ権利行使されるため、ヨーロピアン・コール・オプションの価格を $C_E(t, S)$ とすると

$$C_E(T, S_T) = \max(0, S_T - K)$$

が成り立つ。ここで、上式の右辺はペイオフ関数と呼ばれる。

オプション価格は Black-Scholes 偏微分方程式と呼ばれる方程式に従うことが知られており、この方程式を適当な初期条件および境界条件の下で解くことにより解析解を得ることができる。

コール・オプションを複製ポートフォリオでヘッジすると金利を受け取ることができるため、オプション価格はペイオフ関数より上方向に乖離する。ここでアメリカン・コール・オプションを考えると、その価格はペイオフ関数より常に高い価値をもつため、たとえ早期権利行使が可能であったとしても、早期行使が最適戦略とはなり得ない。したがって、アメリカン・コール・オプションの価格 $C_A(t, S)$ はヨーロピアン・コール・オプションの価格 $C_E(t, S)$ と等しくなる。

一方で、アメリカン・プット・オプションの価格は、より複雑な振る舞いをする事が知られている。ヨーロピアン・プット・オプションの価格を $P_E(t, S)$ とすると、満期 $t = T$ において

$$P_E(T, S_T) = \max(0, K - S_T)$$

が成り立つ。アメリカン・プット・オプションは、アメリカン・コール・オプションと異なり、原資産価格の挙動によっては早期権利行使することが最適戦略となる。具体的には、時刻に依存して決まるある境界価格が存在し、原資産価格がその境界価格を下回った場合に早期権利行使することになる。この境界価格を最適権利行使境界 (または単に権利行使境界) という (図 1)。

アメリカン・プット・オプション価格は、通常は非線形偏微分方程式の自由境界問題 (free boundary problems) を解くことで求められる。一般に自由境界問題を解くことは容易ではないが、アメリカン・プット・オプション価格については、権利行使境界が満たす非線形方程式が知られており、権利行使境界を用いてオプション価格を求めることができる。よって、権利行使境界を高精度に計算する

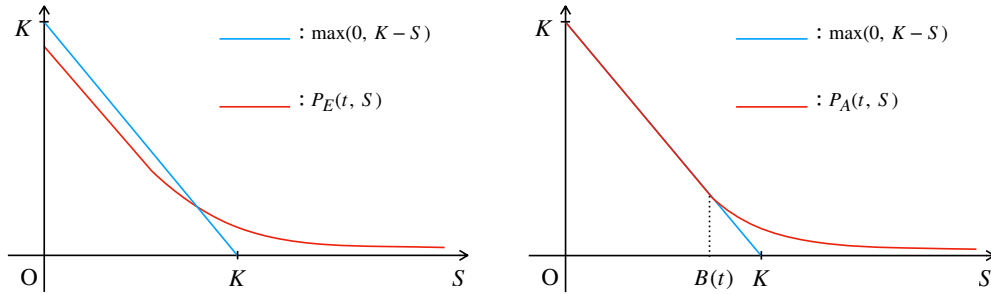


図1 ヨーロピアン・プット・オプション価格は、左図のように原資産価格 S_t が小さくなると、ペイオフ関数の値を下回る。このようなとき、もし早期権利行使が可能ならば、権利行使した方が得になる。よって、アメリカン・プット・オプションについては、ある境界値関数 $B(t)$ が存在し、原資産価格 S_t が $B(t)$ を下回るならば即座に権利行使されることになるので、価格は右図ようになる。

ことができれば、アメリカン・プット・オプション価格を高精度に求めることが可能となる。

権利行使境界については様々な側面から研究がなされているが、解析解を求めることができないため、数値計算を用いた近似解法が研究されてきた。たとえば、古典的にはラティス法を用いたバミューダオプションによる近似や、最適権利行使境界に関する積分方程式を離散化する方法などが提案されている。しかし、我々が知る限り、既存の数値計算手法による計算結果は、最良のものであっても相対誤差が 10^{-6} 程度であり、その精度は十分であると言い難い。そのため金融工学の分野では、学術上だけでなく実務上も、最適権利行使境界の高精度な数値計算手法が望まれている。

そのような現状に対し、本研究では、応用数学分野で広く知られる高精度数値計算法である二重指数型変数変換 (Double Exponential transformation) および Sinc 関数展開を用いて、権利行使境界を相対誤差 10^{-13} 程度の精度で計算することに成功した。

3 早期行使境界が満たす方程式の導出

本章では、Black-Scholes 偏微分方程式からアメリカン・プット・オプションの早期行使境界が満たす方程式の導出を行う。本章では、以下の定義を用いる。

標準正規分布の累積密度関数を

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

とする。また

$$d_1(x, y, t) = \frac{\log \frac{x}{y} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma \sqrt{t}}, \quad d_2(x, y, t) = \frac{\log \frac{x}{y} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$= d_1(x, y, t) - \sigma \sqrt{t}$$

と定める．さらに， $\max(0, \cdot)$ を $(\cdot)^+$ と表す．

原資産価格 S_t は確率微分方程式

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dB_t$$

の解であるものとして，配当は 0 を仮定する．ここで， $r > 0$ は無リスク利率， $\sigma > 0$ はボラティリティ， $B_t, \{0 \leq t \leq T\}$ はブラウン運動を表すものとする．ヨーロッパン・プット・オプションの価格 $P_E(t, S_t)$ は，行使価格 K として

$$P_E(t, S_t) = \mathbf{E} \left[e^{-r(T-t)} (K - S_T)^+ \right]$$

により明示的に表され，以下の解析解が知られている．

$$P_E(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2(S_t, K, T-t)) - S_t N(-d_1(S_t, K, T-t))$$

アメリカン・プット・オプションの理論価格 $P_A(t, S_t)$ は

$$P_A(t, S_t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} \left[e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau)^+ \right]$$

と表される．ただし， τ は停止時刻を意味する．配当がない場合のアメリカン・プット・オプション価格 $P_A(t, S_t)$ は，Jacka(1991)[6] や Carr *et al.*(1992)[3] などにより，ヨーロッパン・プット・オプション価格と早期行使プレミアムといわれる項に分解されることが知られており

$$P_A(t, S_t) = P_E(t, S_t) + \mathbf{E} \left[\int_0^{T-t} rKe^{-ru} 1\{S(u) \leq B(t+u)\} du \right] \quad (1)$$

と表される．ただし， $B(t)$ は最適権利行使境界と呼ばれる $0 \leq t \leq T$ で定義される関数， $S(x)$ は $S(0) = S$ となる幾何ブラウン運動の $t = x$ における値を表す．

最適権利行使境界 $B(t)$ を用いると (1) は

$$P_A(t, B(t)) = P_E(t, B(t)) + rK \int_t^T e^{-r(s-t)} N(-d_2(S_t, B(s), T-t)) ds$$

と表すことができる．アメリカン・プット・オプションの価格 $P_A(t, S_t)$ は， $S_t = B(t)$ でペイオフ関数と等しくなることから，以下の等式が成り立つ．

$$K - B(t) = P_E(t, B(t)) + rK \int_t^T e^{-r(s-t)} N(-d_2(B(t), B(s), T-t)) ds \quad (2)$$

ここで， $t = T - \frac{2u}{\sigma^2}$ ， $B(t) = Ke^{-b(u)}$ ， $q = \frac{2r}{\sigma^2}$ として (2) を整理すると， $B(t)$ に関する方程式は

$$\begin{aligned} e^{-qu} N\left(\frac{b(u) - (q-1)u}{\sqrt{2u}}\right) + e^{-b(u)} N\left(\frac{-b(u) + (q+1)u}{\sqrt{2u}}\right) - 1 \\ + q \int_0^u e^{-q(u-v)} N\left(\frac{b(u) - b(v) - (q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}}\right) dv = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

と表される (これを価格分解式という)．本研究の目的は，(3) を満たす $b(u)$ を数値計算により求めることである．

権利行使境界 $b(u)$ は Evans *et al.*(2002)[5] などにより, u に関して単調増加かつ, 次の性質を満たすことが知られている.

$$b(0) = 0, \quad \lim_{u \downarrow 0} \frac{b(u)}{\sqrt{-u \log u}} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} b(u) = \log \left(1 + \frac{1}{q} \right) \quad (4)$$

$b(u)$ は解析的に求めることができないため, 数値計算により求める必要がある. 試行錯誤の結果, (3) を以下のように漸化式で表し, $b_n(u)$ を用いて $b_{n+1}(u)$ を定めるスキームを構築することにより, 権利行使境界 $b(u)$ を計算できることがわかった.

$$\begin{aligned} e^{-qu} N \left(\frac{b_{n+1}(u) - (q-1)u}{\sqrt{2u}} \right) + e^{-b_{n+1}(u)} N \left(\frac{-b_{n+1}(u) + (q+1)u}{\sqrt{2u}} \right) - 1 \\ + q \int_0^u e^{-q(u-v)} N \left(\frac{b_n(u) - b_n(v) - (q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}} \right) dv = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

初期状態を $b_0(u) \equiv 0$ として, 関数値を求めたい u 毎に Newton 法を計算して, $b_n(u)$ から $b_{n+1}(u)$ を計算する. ここで (5) 下段の積分項は, 早期行使プレミアムを意味する.

4 本研究で用いる離散化手法

本章では, 本研究で用いる離散化手法である DE 数値積分公式と Sinc 関数展開について簡単に説明する.

4.1 DE 数値積分公式

有界区間 $[a, b]$ 上の積分を以下の二重指数型変数変換 (Double Exponential transformation) により置換積分する [8]. 具体的には

$$x = \varphi^{\text{DE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \right) + \frac{b+a}{2}$$

として, 有界区間 $[a, b]$ の定積分に対する近似を以下のように与える.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi^{\text{DE}}(s)) \{\varphi^{\text{DE}}\}'(s) ds$$

数値計算においては, 無限和を計算することができないので, 有限項で打ち切る.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi^{\text{DE}}(s)) \{\varphi^{\text{DE}}\}'(s) ds \approx h \sum_{j=-N}^N f(\varphi^{\text{DE}}(jh)) \{\varphi^{\text{DE}}\}'(jh)$$

$\varphi(s)$ は $s \rightarrow \pm\infty$ で急速に a, b に漸近するので, $\varphi'(s)$ は二重指数的に減衰する. 無限積分をある十分に大きい正の定数 N を用いて, $[-N, N]$ の有限項で打ち切ることにより, 数値積分を高精度に行うことができる.

DE 数値積分公式において、刻み幅 h と打ち切り項数 N を適切に定めることにより、打ち切り誤差と台形則の離散化誤差がほぼ等しくなるように離散化を行うと、端点に特異性がなければ、DE 数値積分公式の誤差は

$$O\left(\exp\left(-\frac{CN}{\log N}\right)\right)$$

となることが知られている。これは、 N の増加に伴い誤差が指数的に近い速度で減少することを示している。

4.2 Sinc 関数展開

Sinc 関数は区間 $(-\infty, \infty)$ で定義される関数 [9][10] であり

$$\text{Sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

で定められる。Sinc 関数は、 $\text{Sinc}(0) = 1$, $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を満たす x に対して、 $\text{Sinc}(x) = 0$ を満たす振動関数である。ここで、関数 $u(t)$ は Sinc 関数を用いて

$$u(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(jh) \text{Sinc}\left(\frac{t}{h} - j\right) \approx \sum_{j=-N}^N u(jh) \text{Sinc}\left(\frac{t}{h} - j\right)$$

と近似することができる。数値計算上は有限項で打ち切る必要があるため、打ち切り誤差が発生することになる。ここで、 $u(jh) \approx 0$ となるような $j = \pm N$ を打ち切り項数とすることにより、極めて高精度の近似を与えることが知られている。Sinc 関数近似の誤差は、関数 $u(t)$ を $t \rightarrow \pm\infty$ で二重指数関数的に減衰する正則関数であると仮定し、打ち切り項数 N と刻み幅 h を適切にとることができる

$$O\left(\exp\left(-\frac{CN}{\log N}\right)\right)$$

と評価される。これは DE 数値積分公式と同様に、 N の増加に伴い誤差が指数的に近い速度で減少することを示している。

5 数値計算手法

■数値計算におけるパラメータ一覧

本研究の数値計算で用いるパラメータ R , L , M , N は正の定数として、以下のように定義する。

R : 台形則の打ち切り項数

L : Sinc 関数近似の打ち切り項数

M : 台形則の区間 0.5 あたりの分点数

N : Sinc 関数近似の区間 0.5 あたりの分点数

5.1 オプション価格評価式への適用

アメリカン・プット・オプションの権利行使境界 $b(u)$ が満たす非線形方程式を解く際に、まず早期行使プレミアムを意味する以下の積分項を計算する必要がある。

$$q \int_0^u e^{-q(u-v)} N \left(\frac{b_n(u) - b_n(v) - (q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}} \right) dv \quad (6)$$

関数 $b(u)$ は $[0, \infty)$ で定義される関数であるが、(4) より $b(0) = 0$ であり、 $b(u)$ の $u \rightarrow \infty$ での漸近挙動は $\log \left(1 + \frac{1}{q} \right)$ へ収束することが知られているので、以下の操作を加えることにより、 $u = 0$ で 0、かつ $u \rightarrow \infty$ で 0 に漸近する関数 $c(u)$ を導入する。

$$c(u) = b(u) - \frac{u}{1+u} \log \left(1 + \frac{1}{q} \right)$$

半区間 $[0, \infty)$ で定義される関数 $c(u)$ に対して、DE 変換

$$u = \varphi(s) = \exp \left\{ \frac{\pi}{2} \sinh(s) \right\}$$

を適用することにより、全区間 $(-\infty, \infty)$ で定義され、 $u \rightarrow \pm\infty$ で急速に 0 に収束するような関数 $c(\varphi(s))$ を得る。また、早期行使プレミアムの積分区間は $[0, u]$ であるため、積分変数を $v = uw$ と置き換えて

$$w = \psi(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \pi \sinh(\xi) \right) \right\}$$

とすることにより、全区間の無限積分へと書き換えることができる。これにより積分項を台形則を用いて高精度に数値計算することが可能になる。

これらの積分変換を早期行使プレミアムの価格評価式 (6) に適用すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & q \int_0^u e^{-q(u-v)} N \left(\frac{b_n(u) - b_n(v) - (q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}} \right) dv \\ &= qu \int_0^1 e^{-qu(1-w)} N \left(\frac{b_n(u) - b_n(uw) - (q-1)u(1-w)}{\sqrt{2u(1-w)}} \right) dw \\ &= q\varphi(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q\varphi(s)(1-\psi(\xi))} N \left(\frac{b_n(\varphi(s)) - b_n(\varphi(s)\psi(\xi)) - (q-1)\varphi(s)(1-\psi(\xi))}{\sqrt{2\varphi(s)(1-\psi(\xi))}} \right) \psi'(\xi) d\xi \quad (7) \end{aligned}$$

この積分を台形則で計算するには、 $v = \varphi(jh)$ となるような v に対して $b_n(v)$ の値が必要になるが、すでに値が求まっている $b_n(v)$ の値を用いて線形補間などにより計算すると誤差が増大してしまう。そのため、有限個の分点における関数値を用いて、任意の点における関数値を高精度に近似する必要がある。この問題を解決するため、前章で示した Sinc 関数近似を用いる。

5.2 Sinc 関数を用いた離散化

関数 $c(u)$ に対して DE 変換 $u = \varphi(s)$ を適用したものについて、関数 $c(\varphi(s))$ は $s \rightarrow \pm\infty$ で二重指数関数に近いオーダーで減衰するので、これに対して Sinc 関数近似を用いることにより、分点以

外の任意の点における関数値を高精度に求めることができる．Sinc 関数展開を変数変換後の式に適用して以下の式を得る．

$$b(\varphi(s)) \approx \sum_{k=-N}^N c_k \operatorname{Sinc} \left(\frac{y - \varphi(s)}{h} \right) + \frac{\varphi(s)}{1 + \varphi(s)} \log \left(1 + \frac{1}{q} \right) \quad (8)$$

u の値から $\varphi(s)$ の逆変換を用いて s の値を求め、(8) の Sinc 関数近似により $c(\varphi(s))$ を求めた上で $b(u)$ の値を得る．

以上をまとめると、全体の数値計算の流れは次のようになる．すなわち、ある u に対して積分項（早期行使プレミアム (6)）を DE 数値積分公式により計算し、 $b_{n+1}(u)$ に関する非線形方程式を Newton 法により計算する．ここで、積分項を計算する際に任意の v に対して $b_n(v)$ の値が必要になるが、全区間で定義される、両端で急速に減衰する関数 $c(\varphi(s))$ に変換したものに対して、Sinc 関数近似を適用することにより高精度な近似スキームを構築することができる．

6 数値計算結果

権利行使境界 $b_I(u)$ に対して、初期状態 $b_0(u) = 0$ として Newton 法により数値解を求めるときの最大相対誤差を示す．ここで、 $I \in \mathbb{N}$ は全体の反復回数とする．また、 $q = 1.0$ とする．本研究のスキームでは、2 種類の打ち切り幅と刻み幅が存在する．打ち切り幅については、関数 $b(u)$ を Sinc 関数により近似する幅 L と早期行使プレミアムの積分項を台形則により計算するときの R がある．本研究の数値計算では、Sinc 関数展開について、関数 $b(u)$ の $u \rightarrow \infty$ での漸近挙動と数値解を比較し、打ち切り誤差が $3.09417... \times 10^{-16}$ 程度となる打ち切り幅 $L = 4.0$ を採用し、区間 $[-L, L]$ で関数 $c(\varphi(s))$ を近似する．倍精度実数による数値計算では、この打ち切り誤差は十分に小さい．台形則による数値積分に関しても同様にして、打ち切り誤差が同程度に抑えられる $R = 4.5$ を採用し、 $[-R, R]$ により全区間の無限積分を近似する．すなわち、早期行使プレミアムは (7) の最下段に対して、積分区間 0.5 あたりの分割数を $M \in \mathbb{N}$ とすると、分割幅は $h = \frac{1}{2M}$ となる．これより、全区間の分点数は $2M \times 2R = 4RM$ である．被積分関数を

$$f(\xi) := e^{-q\varphi(s)(1-\psi(\xi))} N \left(\frac{b_n(\varphi(s)) - b_n(\varphi(s)\psi(\xi)) - (q-1)\varphi(s)(1-\psi(\xi))}{\sqrt{2\varphi(s)(1-\psi(\xi))}} \right) \psi'(\xi)$$

と定義すると、 $f(\pm R)$ は十分に 0 に漸近しているため、その点での補正は数値計算上、無視することができ、複合台形則を用いて

$$\begin{aligned} q\varphi(s) \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi &\approx qh\varphi(s) \left\{ \frac{1}{2}f(-R) + \sum_{j=1}^{4RM-1} f(-R+jh) + \frac{1}{2}f(R) \right\} \\ &\approx qh\varphi(s) \sum_{j=0}^{4RM} f(-R+jh) \end{aligned}$$

と近似できる．

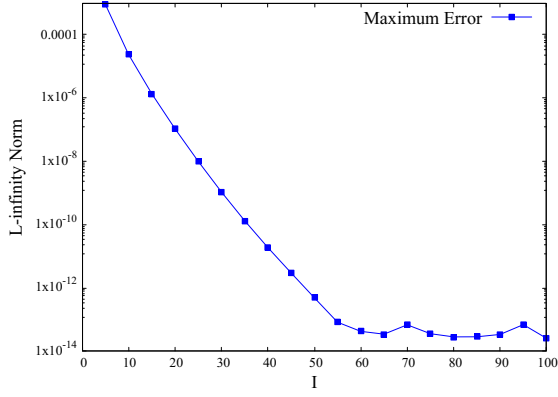


図2 非線形方程式 (5) に対する最大ノルム (9) の計算結果. $N = 10$, $M = 100$ と定めた.

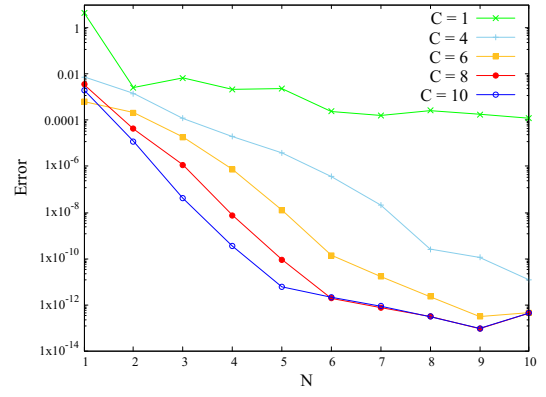


図3 全体の反復回数を $I = 100$, 積分区間 0.5 あたりの Sinc 関数近似および台形則の分点数をそれぞれ N , M とし, $M = CN$ と定め, $u = 1$ における誤差を計算した結果.

権利行使境界 $b_I(u)$ が十分に収束する反復計算回数 I を求めるために, 関数 $b(u)$ の最大ノルムを

$$\|b_I - b_{2I}\|_{L^\infty} := \max_{0 \leq u \leq \infty} |b_I(u) - b_{2I}(u)| \quad (9)$$

と定義して数値計算すると, 図2が得られた. これより本研究の数値計算では, 数値解の最大誤差が 10^{-13} 以下となる反復計算回数である $I = 100$ を採用して, パラメータ N , M に関する誤差解析 (参照; 図3) を行う.

離散化に関しては, $N, M \in \mathbb{N}$ として積分区間 0.5 に対して, Sinc 関数展開の分点数と積分項に対する台形則の分点数をそれぞれ N , M とする. それぞれのパラメータは, Sinc 関数展開の分点数 N と $2N$ の計算結果を比較した際の相対誤差が十分に小さくなるような値を採用する. 本研究で用いた非線形方程式 (5) では, Sinc 関数展開の刻みに対して台形則の刻みをより細かくすると, 収束速度が速くなることがわかった. そのため, 数値計算を行う際には, N と M の比を一定に保った状態で誤差評価を行った. ここで, $C \in \mathbb{N}$ として台形則の分点数を Sinc 関数展開の分点数 N の定数倍, すなわち $M = CN$ と定め, Sinc 関数展開の分点数が 2 倍のものととの相対誤差を解析した. 検証を進めていくと, $u = 1$ 付近での誤差が最も大きくなり, 原点から離れるに従い誤差は減少することが判明したため, 誤差解析は $u = 1$ における $b(u)$ に対して行う. いくつかの C に対して, 相対誤差は

$$\text{Error} := |b_I^N(1) - b_I^{2N}(1)|$$

と評価し, 数値計算結果を図3に示す. ここで, $b_I^N(u)$ は, 全体の反復計算回数 I として, 関数 $c(\varphi(s))$ に対して幅 0.5 あたりを分点数 N で Sinc 関数展開して得られた数値解を意味する. 分点数が大きくなると, $u = 1$ のにおける相対誤差は指数関数に近いオーダーで減衰している.

7 結論

DE 変換と Sinc 関数近似を用いてアメリカン・プット・オプションの最適権利行使境界を近似することにより, 全区間での最大相対誤差を 10^{-13} 程度まで抑えることができ, 極めて高精度な数値解

を得ることに成功した。これは既存研究における精度を大幅に改善する結果である。また、この結果は、アメリカン・プット・オプション価格の高精度数値計算にも応用することができるため、非常に有意義である。

■謝辞 本研究は、科学技術振興機構 (JST) 次世代研究者挑戦的研究プログラム (Grant number:JPMJSP2174) の支援を受けたものです。また、本研究は小林健太教授 (一橋大学大学院経営管理研究科) との共同研究の内容を含んでいます。

参考文献

- [1] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano, and N. Samsoen. Critical stock price near expiration. *Mathematical finance*, 5(2):77–95, 1995.
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [3] P. Carr, R. Jarrow, and R. Myneni. Alternative characterizations of american put options. *Mathematical Finance*, 2(2):87–106, 1992.
- [4] X. Chen and J. Chadam. A mathematical analysis of the optimal exercise boundary for american put options. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 38(5):1613–1641, 2007.
- [5] J. D. Evans, R. Kuske, and J. B. Keller. American options on assets with dividends near expiry. *Mathematical Finance*, 12(3):219–237, 2002.
- [6] S. D. Jacka. Optimal stopping and the american put. *Mathematical Finance*, 1(2):1–14, 1991.
- [7] R. C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, pages 141–183, 1973.
- [8] M. Mori and M. Sugihara. The double-exponential transformation in numerical analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127(1-2):287–296, 2001.
- [9] F. Stenger. Numerical methods based on whittaker cardinal, or sinc functions. *Siam Review*, 23(2):165–224, 1981.
- [10] F. Stenger, B. Baker, C. Brewer, G. Hunter, S. Kaputerko, and J. Shepherd. Periodic approximations based on sinc. *Int. J. Pure Appl. Math*, 49(1):63–72, 2008.